

APLIKACE STOCHASTICKÉHO MODELU MARKOVSKÉHO TYPU

APPLICATION OF A MARKOV'S TYPE STOCHASTIC MODEL

Jan Získal

Anotace:

Je uvedena ukázka využití markovských procesů při ekonomickém rozhodování a možnosti popisu těchto situací. Uvedený přístup k rozhodování není u nás prozatím obvyklý z důvodů, které spočívají jednak v určité náročnosti, kterou si vyžadují zavedené pojmy a jednak v určité obtížnosti získávání odpovídajících podkladových údajů. Naléhavost aplikace markovské analýzy v ekonomii plyne zejména z rostoucího významu procesů hromadné obsluhy.

Klíčová slova:

Markovský systém, absolutní a limitní pravděpodobnosti, matice přechodu, absorpční stav, systémová analýza.

Annotation:

The contribution contains application of Markov's process in business decision making and possibilities of description of such situations. The mentioned method of decision making is not yet common. The reasons are in difficulties connected with established terms and in certain problems in gaining relevant data sources. The persistence of application of Markov's analysis in economy unwinds from the raising importance of queuing models.

Keywords:

Markov's system, absolute and limit probability, transition matrix, absorption state

ÚVOD

Rozšířené optimalizační modely pracují často s údaji, které podléhají náhodným výkyvům (opotřebení mechanismů, poruchy, meteorologické vlivy atd.). Na tuto okolnost lze reagovat při postoptimalizačních úvahách nebo v rámci stochastického programování konstruovat modely, které považují některé veličiny za střední hodnoty vlastní určitému rozdělení četností. Toto pojetí nepřihlíží k vnitřní struktuře procesů, ale jen k možným nahodilostem. Náhodný prvek je do modelu vnášen zvenčí.

K řešení tohoto problému lze též přistupovat jiným způsobem. Můžeme považovat celý modelovaný proces za náhodný. Východiskem pro toto pojetí může být soustava podmíněných pravděpodobností v rámci markovských procesů.

Význam aplikace markovských řetězců v ekonomii roste (Získal, 2005). Využívají se pro modelování systémů, které se mohou nacházet v jednom z konečného počtu stavů a to vždy v jednotlivém časovém kroku. Analýza Markovova řetězce může být využita při řešení celé řady manažerských problémů, které mají dynamickou povahu.

CÍL A METODIKA

Cílem příspěvku je upozornit a doplnit znalosti o možnostech využití modelů markovského typu pro předpovědi budoucího chování studovaného systému. Jestliže dovedeme formulovat průběh určitého procesu tak, že jej lze rozložit na řadu stavů kterými prochází v řadě okamžiků, můžeme též ocenit každý stav, resp. každý přechod. Pak lze vyhledávat kombinace

jednotlivých možných přechodů z jednoho stavu do jiného, které jsou z hlediska ocenění optimální.

Jednotlivé studované pochody musíme zkoumat tak, abychom pro jejich popis dostali matice pravděpodobností přechodu mezi určitými stavy. Hodnotové ocenění přechodů poskytuje cenné informace a dovoluje určitý způsob odhadu dalšího vývoje systému a hledání optimální cesty při volbě alternativ řešení.

Jestliže je při konstrukci stochastického modelu zdůrazněn časový vývoj, pak jsou po sobě následující stavy systému většinou určitým způsobem podmíněny a existuje mezi nimi jistá vazba. Pro popis přechodu z jednoho stavu systému do následujícího je vhodné využít podmíněných pravděpodobností. Pravděpodobnosti mohou být podmíněny nikoliv jedním, ale několika předchozími stavy. Uvažujeme-li podmíněnost pouze mezi dvěma stavy, hovoříme o stochastických modelech s jednoduchou vazbou, které se též nazývají Markovovými.

Pravděpodobnosti mohou být podmíněny nikoli jednou, nýbrž několika předchozími stavy. Zkušenosti ukázaly, že ve většině případů vystihne podstatné rysy modelu vazba jednoduchá a vícenásobná vazba jen určitým způsobem upřesňuje získanou informaci.

VÝSLEDKY A DISKUSE

Nejdříve je nutné si upřesnit některé základní pojmy. Dochází-li při zkoumání stochastických procesů k přechodům mezi jednotlivými stavy systému v nespojitých okamžicích, hovoříme o Markovových řetězcích.

Markovovův řetězec (systém) je definován takto (Havlíček, 1991): Posloupnost náhodných proměnných $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ tvoří Markovovův řetězec, platí-li pro každé $m = 2, 3, \dots$ a pro všechny možné hodnoty $j, i, \dots, r$ těchto náhodných veličin vztah

$$p_{ij}^{(m)} = P\{x_m = j | x_{m-1} = i, x_1 = r\} = P\{x_m = j | x_{m-1} = i\} \quad (1)$$

Homogenní řetězec předpokládá, že pravděpodobnosti přechodu nezávisí na výchozí situaci a nemění se v čase. Takový řetězec je určen vektorem výchozích pravděpodobností a maticí pravděpodobností přechodu (Získal, Havlíček, 2003), tj.

$$P^{(0)} = (p_0^0, p_1^0, \dots, p_n^0) \quad (2)$$

$$T = (p_{ij}), i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\text{Pro stochastickou matici přechodu } T \text{ platí: } 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad a \quad \sum_j p_{ij} = 1 \quad (4)$$

Pro vektor $p^{(1)}$ popisující situaci v okamžiku „1“ můžeme napsat

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot T \quad (5)$$

Pro j -tý vektor dostaneme

$$P_j^{(1)} = \sum_i p_i^{(0)} \cdot p_{ij} \quad (6)$$

Vektor absolutních pravděpodobností $p^{(n)}$ dává odpověď na otázku, jaké budou stavy v následujícím období (Získal, Havlíček, 2003).

$$\begin{aligned} \text{Obecně platí} \quad & p^{(n+1)} = p^{(n)} \cdot T \\ \text{nebo} \quad & p^{(n)} = p^{(0)} \cdot T^n \end{aligned} \quad (7)$$

Výpočet absolutních pravděpodobností vychází z Markovovy rovnice (Havlíček, 1998)

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n-m)}, m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

Popis zkoumaného systému pomocí absolutních pravděpodobností dovoluje zkoumat, zda se systém ustálí v nějakém stavu či nikoli.

Stabilizovaný stav systému v daleké budoucnosti lze popsat limitními (ergodickými) pravděpodobnostmi (Získal, Havlíček, 2003). Pro matici přechodu T ve stabilizovaném systému platí

$$p_{ij}^{(n)} = p_j \quad (9)$$

Pro výpočet limitních pravděpodobností lze odvodit vztah (Havlíček 1998)

$$p_j^{\infty} = \sum_{k=1}^r p_{kj} \cdot p_k \quad (10)$$

$$p_1^{\infty} + p_2^{\infty} + \dots + p_r^{\infty} = 1 \quad (11)$$

Blíže k této problematice viz také (Dömeová 2005).

Jestliže je některý stav absorpční, usuzujeme z povahy problému, že se soustava může stabilizovat. Pravděpodobnosti přechodu z přechodového stavu i do absorpčního stavu j lze popsat takto (Dömeová 2005)

$$b_{ij} = r_{ij} + \sum q_{ik} \cdot b_{kj} \quad (12)$$

Maticově

$$B = R + QB = (E - Q)^{-1} \cdot R \quad (13)$$

Matici s absorpčními stavy lze rozložit na submatice tímto způsobem:

$$T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \quad (14)$$

kde E je jednotková matice

O je nulová matice

R je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodovými a absorpčními stavy

Q je matice pravděpodobností přechodu mezi přechodovými stavy

Pro ekonomické rozhodování má značný význam ocenění procesů, kdy pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j (p_{ij}) můžeme přisoudit ocenění r_{ij} vyjádřené hodnotově.

Jestliže označíme $v_i^{(n)}$ očekávaný celkový výnos procesu po n krocích, lze jej pak vyjádřit vztahem (Döme, 2005).

$$v_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n p_{ij} [r_{ij} + v_j^{(n-1)}] \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

Vzorec (15) vyjadřuje, že celkový očekávaný výnos závisí na matici ocenění $R = (r_{ij})$ a současně na celkovém očekávaném výnosu $v^{(n-1)}$ až do předešlého kroku.

$$\text{jestliže} \quad q_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} r_{ij} \quad (16)$$

$$\text{pak} \quad v_i^{(n)} = q_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} v_j^{(n-1)} \quad (17)$$

$$\text{maticově} \quad v^{(n)} = q + T \cdot v^{(n-1)} \quad (18)$$

Markovská analýza vychází z určitých předpokladů (Získal, Havlíček 2003) a předpokládá vyhledávání odpovědi na otázku „co když“, tj. odpovědi na otázky, jaký dopad na budoucí pravděpodobnosti budou mít změny hodnot matice přechodu, jaký vliv na pravděpodobnosti vyváženého stavu bude mít vyloučení nebo připojení jiných stavů, jaký potencionální dopad bude mít zavedení absorpčního stavu atd..

Za účelem lepšího pochopení a srozumitelnosti předchozího výkladu uvedeme následující ilustrační příklad. Firma I vyrábí výrobek A a B a konkurenční firma II výrobek C. Podíl výrobku A na trhu činí 27,5 %, výrobku B 37,5 % a výrobku C 35 %. Firma I chce ještě více ovládnout trh a proto se rozhoduje mezi dvěma alternativami propagace svých výrobků:

- a) propagovat pouze výrobek A. K tomu je třeba investovat 300 tisíc Kč a očekává se tato matice přechodu

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

- b) propagovat jen výrobek B. To bude stát 560 tis. Kč. A příslušná matice přechodu je

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Nejdříve nás bude zajímat, která alternativa přinese větší zvýšení celkového podílu firmy na trhu v dlouhodobé perspektivě. Podle vztahu (10) a (11) dostaneme pro alternativu a) $p_1 = 0,555$, $p_2 = 0,223$, $p_3 = 0,222$, tj. pro výrobky A a B firmy I to znamená 77,8 % podílu na trhu. Pro alternativu b) pak dostaneme $p_1 = 0,190$, $p_2 = 0,715$, $p_3 = 0,095$, což znamená 90,5 % podílu firmy I na trhu, čili v podstatě ovládnutí trhu.

V rámci postoptimalizační analýzy nás bude dále zajímat, která alternativa bude dlouhodobě efektivnější, čili jaký bude její přínos na investovanou korunu

Jestliže předpokládáme, že vektor výchozích pravděpodobností je vektor $p^{(0)} = (0,275; 0,375; 0,350)$, pak při alternativě a) dojde ke zvýšení podílu na trhu o 12,8 % ($0,778 - 0,850$). Oproti 0,650 představuje 0,128 zvýšení o 19,6 % a na investovaných tis. Kč to představuje

0,065 %. U alternativy b) dojde ke zvýšení podílu na trhu o 25,5 %. Oproti 0,650 to představuje zvýšení o 39,2 % a na investovaných tis. Kč je to 0,075 %.

Za předpokladu, že 1 % zvýšení podílu na trhu představuje přínos 20 tis. Kč, pak při propagaci výrobku A to představuje 392 000 Kč a po odečtení nákladů na propagaci vychází přínos 92 000 Kč. Při propagaci výrobku B vychází čistý přínos 224 000 Kč. Obdobně lze dále rozvíjet a prohlubovat systémovou analýzu.

ZÁVĚR

Stochastické modely markovského typu se využívají pro předpovědi chování ekonomických systémů v čase a získané informace mohou sloužit jako základ pro rozhodování v různých oblastech, například při stanovení perspektivnosti výrobků, při řešení problémů hromadné obsluhy v teorii obnovy, údržby, v managementu ekologických hledisek apod. Z ekonomického hlediska vyžadují markovské řetězce určité ocenění buď stavů nebo přechodů. Pak lze vyhledávat takové cesty vývoje systému, které jsou z hlediska zavedeného ocenění optimální. Markovský systém udává budoucnost jen na základě současnosti a nezná minulost.

Určitým problémem při aplikaci markovské analýzy může být stanovení matice přechodu. Pro její konstrukci mohou posloužit buď historická data nebo se využívá subjektivních odhadů expertů. Kromě vlastního poznatkového přínosu pro řešení nejrůznějších aplikací je znalost základních vlastností markovských procesů důležitá pro pochopení stochastických simulačních modelů hromadné obsluhy, obnovy, zásob a jiných.

Literatura

1. Havlíček, J.: Stochastické modely. ČZU v Praze, PEF, 1998. ISBN 80-213-0410-3.
2. Získal, J., Havlíček, J.: Ekonomicko matematické metody II. ČZU v Praze, PEF, 2003. ISBN 80-213-0664-5.
3. Získal, J.: Využití markovské analýzy při ekonomickém rozhodování. Sborník Firma a konkurenční prostředí, MZLV v Brně. 2003. ISBN 80-7157-695-6.
4. Dömeová, L.: Stochastické modely I. ČZU v Praze, PEF. 2005. ISBN 80-213-1371-4.

Kontaktní adresa autora

Prof. Ing. Jan Získal, CSc., PEF ČZU v Praze,

Katedra operační a systémové analýzy. E_mail: ziskal@pef.czu.cz, tel. 224 382 355